Formes différentielles

Fiche de A. Gammella-Mathieu (IUT de Mesures Physiques de Metz – Université de Lorraine)

Exercice 1

Déterminer si les formes différentielles suivantes sont exactes et dans ce cas, les intégrer :

1. $\omega_1 = 2xydx + x^2dy$
2. $\omega_2 = xydx - zdy + xzdz$
3. $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$
4. $\omega_4 = yz^2dx + (xz^2+z)dy + (2xyz+2z+y)dz.$

Correction ▼ [006873]

Exercice 2

On considère le changement de variables en coordonnées sphériques suivant :

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= r\cos\varphi\sin\theta \\ z &= r\sin\varphi \end{cases}$$

1. Calculer dx, dy, dz.
2. Vérifier que $xdx + ydy + zdz = rdr$. En déduire $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$ et $\frac{\partial r}{\partial z}$.

Correction ▼ [006874]

Exercice 3

On considère la forme différentielle $\omega = (x^2+y^2+2x)dx + 2ydy$.

1. Montrer que ω n'est pas exacte.
2. Trouver une fonction $\psi(x)$ telle que $\psi(x)\omega = df$. Préciser alors f. (On dit que ψ est un facteur intégrant.)

Correction ▼ [006875]

Exercice 4

On considère le champ vectoriel $\vec{V}(x,y) = (1+2xy, x^3-3)$. Ce champ est-il un champ de gradient ?

Correction ▼ [006876]

Exercice 5

Quel est le champ vectoriel qui dérive du potentiel

$$U(x,y,z) = 1 + x + xy + xyz?$$

Correction ▼ [006877]

Exercice 6

Calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{V}(x,y) = (3x, x+y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

Correction ▼ [006878]

Exercice 7

Calculer le travail W de la force $\vec{F}(x,y,z) = (yz,zx,xy)$ le long de l'hélice H paramétrée par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et $z = t$ où t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

Correction ▼ [006879]

Exercice 8

On donne le champ vectoriel

$$\vec{V}(x,y,z) = (y^2 \cos x, 2y\sin x + e^{2z}, 2ye^{2z}).$$

1. Montrer que ce champ est un champ de gradient.
2. Déterminer le potentiel $U(x,y,z)$ dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine.
3. Quelle est la circulation de ce champ de $A(0,1,0)$ à $B(\frac{\pi}{2},3,0)$?

Correction ▼ [006880]

Exercice 9

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer $I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy$ où

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0; y \geqslant 0; x+y \leqslant 1\}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [006881]

Exercice 10

On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

1. Dans quel domaine cette forme différentielle est-elle définie ?
2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_C \omega$ où C est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
3. La forme ω est-elle exacte ?

Correction ▼ [006882]

Références

P. Thuillier, J.C. Belloc, *Mathématiques, analyse tome 1*, 2ème édition, Masson (1990).

D. Duverney, S. Heumez, G. Huvent, *Toutes les mathématiques MPSI, PCSI, PTSI, TSI*, Ellipses (2004).

Indication pour l'exercice 9 ▲

On rappelle la formule de Green-Riemann qui permet de faire le lien entre intégrale double et intégrale curviligne :

Théorème. Soit $\mathscr{D}$ un domaine de $\mathbb{R}^2$ limité par une courbe fermée $\mathscr{C}$ que l'on suppose coupée par toute parallèle aux axes en deux points au plus. On considère une forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ définie sur $\mathscr{D}$. Si les fonctions P et Q sont de classe C^1, on a :

$$\int_{\mathscr{C}^+} Pdx + Qdy = \iint_{\mathscr{D}} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$$

où l'on a noté $\mathscr{C}^+$ la courbe $\mathscr{C}$ que l'on a orientée dans le sens direct.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour ω_1, on pose $P(x,y) = 2xy$ et $Q(x,y) = x^2$. Comme ω_1 est définie sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2$ et que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, le théorème de Poincaré permet de dire que ω_1 est exacte. On cherche f tel que $df = \omega_1$. Ceci équivaut à résoudre le système
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & x^2 \end{cases}$$
En intégrant la première ligne par rapport à x, on trouve $f(x,y) = x^2y + c(y)$. En dérivant l'expression que l'on vient d'obtenir par rapport à y et en identifiant avec la deuxième ligne du système, on trouve
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + c'(y) = x^2.$$
Il s'ensuit que $c'(y) = 0$ et donc que $c(y) = c \in \mathbb{R}$. Par suite, la fonction f cherchée est :
$$f(x,y) = x^2y + c$$
où c est une constante réelle.

2. Pour ω_2, on pose $P(x,y,z) = xy$, $Q(x,y,z) = -z$ et $R(x,y,z) = xz$. On constate que $\frac{\partial P}{\partial y} = x$ alors que $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. La forme ω_2 n'est donc pas exacte.

3. Pour ω_3, on pose $P(x,y) = 2xe^{x^2-y}$ et $Q(x,y) = -2e^{x^2-y}$. Là aussi, $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ puisque $\frac{\partial P}{\partial y} = -2xe^{x^2-y}$ alors que $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4xe^{x^2-y}$; ω_3 n'est donc pas exacte.

4. Pour ω_4, posons $P(x,y,z) = yz^2$, $Q(x,y,z) = xz^2 + z$, $R(x,y,z) = 2xyz + 2z + y$. On constate que
   (a) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z^2$
   (b) $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2zy$
   (c) $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2xz + 1$.

   La forme ω_4 est de plus définie sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^3$, elle est donc exacte d'après le théorème de Poincaré. Cherchons maintenant f telle que $df = \omega_4$, ceci revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & yz^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & xz^2 + z \\ \frac{\partial f}{\partial z} & = & 2xyz + 2z + y \end{cases}$$
En intégrant la première équation par rapport à x, on trouve
$$f(x,y,z) = xyz^2 + \psi(y,z).$$
Maintenant, en dérivant l'expression obtenue successivement par y et z et en égalisant avec les deux dernières équations du système, on obtient un nouveau système
$$\begin{cases} xz^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} & = & xz^2 + z \\ 2xyz + \frac{\partial \psi}{\partial z} & = & 2xyz + 2z + y \end{cases}$$
qui équivaut à :
$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} & = & z \quad (1) \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} & = & 2z + y \quad (2) \end{cases}$$
Finalement, en intégrant (1) par rapport à y, il vient $\psi(y,z) = zy + c(z)$. En dérivant cette expression de ψ par rapport à z et en égalisant avec (2), on trouve $y + c'(z) = 2z + y$, c'est-à-dire $c'(z) = 2z$ donc $c(z) = z^2 + c$ où $c \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f telle que $\omega_4 = df$ est de la forme
$$f(x,y,z) = xyz^2 + zy + z^2 + c$$
où $c \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On vérifie que :
   (a) $dx = \cos\varphi\cos\theta dr - r\sin\varphi\cos\theta d\varphi - r\sin\theta\cos\varphi d\theta$
   (b) $dy = \cos\varphi\sin\theta dr - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi + r\cos\theta\cos\varphi d\theta$
   (c) $dz = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi$.

   Par suite, on a :
   (a) $xdx = r\cos^2\varphi\cos^2\theta dr - r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta d\varphi - r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi d\theta$
   (b) $ydy = r\cos^2\varphi\sin^2\theta dr - r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta d\varphi + r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi d\theta$
   (c) $zdz = r\sin^2\varphi dr + r^2\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$.
2. En additionnant, on obtient $xdx + ydy + zdz = rdr$. On en déduit que :
$$xdx + ydy + zdz = r(\frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz).$$
   Ainsi
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Posons $P(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ et $Q(x,y) = 2y$. On voit facilement que $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. La forme ω n'est donc pas exacte.
2. Comme ω est définie sur $\mathbb{R}^2$, il suffit que $\psi\omega$ soit exacte pour que f existe. Maintenant, $\psi\omega$ est exacte si et seulement si
$$\frac{\partial(\psi(x)(x^2+y^2+2x))}{\partial y} = \frac{\partial(\psi(x)2y)}{\partial x}.$$
   Ceci équivaut à $2y\psi(x) = 2y\psi'(x)$. Ainsi, $\psi(x) = \psi'(x)$ pour tout x. Donc $\psi(x) = ke^x$ avec k constante. On peut choisir $k = 0$. Ainsi
$$\psi\omega = e^x(x^2+y^2+2x)dx + e^x(2y)dy.$$
   On cherche ensuite f telle que :
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & e^x(x^2+y^2+2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & e^x(2y) \end{cases}$$
   En intégrant la deuxième équation par rapport à y, on trouve
$$f(x,y) = e^x y^2 + c(x).$$
   En dérivant cette expression par rapport à x et en égalisant avec la première équation du système, on obtient
$$e^x y^2 + c'(x) = e^x(x^2+y^2+2x)$$
   c'est-à-dire
$$c'(x) = e^x(x^2+2x).$$
   Il en résulte que $c(x) = x^2e^x + c$ et donc que
$$f(x,y) = e^x(x^2+y^2) + c$$
   avec c dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Au champ $\vec{V}(x,y)$ est associée la forme

$$\omega = (1+2xy)dx + (x^3-3)dy.$$

Cette forme n'est pas exacte puisque $\frac{\partial(1+2xy)}{\partial y} \neq \frac{\partial(x^3-3)}{\partial x}$. Il s'ensuit que $V(\vec{x,y})$ n'est pas un champ de gradient.

Correction de l'exercice 5 ▲

Le champ vectoriel qui dérive du potentiel U est

$$\vec{\text{grad}}(U) = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}).$$

Il s'agit donc du champ vectoriel de composantes :

$$\vec{\text{grad}}(U) = (1+y+yz, x+xz, xy).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $\omega = 3xdx + (x+y)dy$ la forme différentielle naturellement associée à $\vec{V}(x,y)$ et considérons $x = \cos t$ et $y = \sin t$ comme paramétrage du cercle de centre O et de rayon 1 (avec $t \in [0;2\pi]$). Il s'ensuit que la circulation $\int_C \vec{V}.\vec{dl}$ n'est autre que :

$$\int_C \vec{V}.\vec{dl} = \int_C w = \int_0^{2\pi} (3\cos t(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\cos t)dt.$$

Comme $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, on obtient :

$$\int_C \vec{V}.\vec{dl} = \int_0^{2\pi} (-2\sin t\cos t + \frac{\cos(2t)+1}{2})dt = [\cos^2(t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2}]_0^{2\pi} = \pi.$$

Remarquons que si la forme ω avait été exacte, on aurait obtenu $\int_C \vec{V}.\vec{dl} = 0$ comme réponse, puisque l'intégrale curviligne d'une forme exacte sur une courbe fermée est nulle.

Correction de l'exercice 7 ▲

Notons $\omega = yzdx + zxdy + xydz$ la forme différentielle associée à $\vec{F}(x,y,z)$. Par définition de W, on a $W = \int_H \vec{F}.\vec{dl} = \int_H \omega$. D'après le paramétrage donné pour H, on a

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} yzdx + zxdy + xydz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((\sin t)t(-\sin t) + t\cos^2 t + \cos t \sin t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (t\cos(2t) + \cos t \sin t)dt. \end{aligned}$$

On a utilisé ici la formule trigonométrique : $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$. En faisant une intégration par parties, on constate que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(2t)dt = [\frac{t\sin(2t)}{2}]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2t)}{2}dt.$$

On en déduit que

$$W = [\frac{t\sin(2t)}{2}]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}[\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}[\sin^2(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Remarquons que $\omega = yzdx + zxdy + xydz$ est exacte. De plus, on vérifie aisément que $\omega = d(xyz)$. On peut alors retrouver le résultat précédent en faisant :

$$W = f(B) - f(A)$$

où l'on a posé $f(x,y,z) = xyz$,

$$B = (\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4}), \frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$$

et

$$A = (\cos(0), \sin(0), 0) = (1,0,0).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On note $P(x,y,z) = y^2 \cos x$, $Q(x,y,z) = 2y \sin x + e^{2z}$ et $R(x,y,z) = 2ye^{2z}$. La forme $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, naturellement associée au champ $\vec{V}(x,y,z)$, est exacte puisqu'elle est définie sur $\mathbb{R}^3$ et
   (a) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \cos x$
   (b) $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$
   (c) $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2e^{2z}$.

   Le champ $\vec{V}(x,y,z)$ est donc un champ de gradient.
2. Cherchons U tel que $\omega = dU$. Cela nous conduit à résoudre le système :
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} &= y^2 \cos x \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 2y \sin x + e^{2z} \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= 2ye^{2z} \end{cases}$$
   En intégrant la première équation par rapport à x, on trouve :
$$U(x,y,z) = y^2 \sin x + \psi(y,z).$$
   Maintenant, en utilisant les deux dernières équations, on est amené à résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= e^{2z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 2ye^{2z} \end{cases}$$
   Par suite, on vérifie que $\psi(y,z) = e^{2z}y + c(z)$ avec $c'(z) = 0$. Donc $c(z) = c$ avec c constante réelle et finalement :
$$U(x,y,z) = y^2 \sin x + e^{2z}y + c$$
   avec $c \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, on veut que $U(0,0,0) = 1$ ce qui donne $c = 1$.
3. La circulation du champ de $A(0,1,0)$ à $B(\frac{\pi}{2},3,0)$ est
$$\int_{\widehat{AB}} \vec{V}.\vec{dl} = \int_{\widehat{AB}} \omega = U(B) - U(A) = U(\frac{\pi}{2},3,0) - U(0,1,0) = 11.$$
   Remarquons que lorsque ω est exacte, pour calculer l'intégrale curviligne de ω sur un chemin, il suffit de connaître l'origine et l'extrémité du chemin. Autrement dit, l'intégrale curviligne d'une forme exacte sur $\widehat{AB}$ ne dépend que de A et de B, et non du chemin choisi pour aller de A à B.

Correction de l'exercice 9 ▲

On rapporte le plan à un repère orthonormé direct d'origine O. D'après la formule de Green-Riemann, en choisissant de prendre $P = 0$ et $Q = x^2y$ de sorte que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy$, on obtient :

$$I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_T x^2ydy$$

où l'on a noté T le triangle OAB orienté dans le sens direct avec $O(0,0)$, $A(1,0)$ et $B(1,1)$. Ainsi

$$I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_{\widehat{OA}} x^2ydy + \int_{\widehat{AB}} x^2ydy + \int_{\widehat{BO}} x^2ydy.$$

L'intégrale curviligne d'une forme différentielle sur un chemin est indépendant du paramétrage choisi pour ce chemin. Pour le calcul, nous choisissons de paramétrer $\widehat{OA}$ par $x = t$ et $y = 0$ avec t variant de 0 à 1 et ainsi $\int_{\widehat{OA}} x^2ydy = 0$. De même, nous choisissons de paramétrer $\widehat{BO}$ par $x = 0$ et $y = t$ avec t variant de 1 à 0 et ainsi $\int_{\widehat{BO}} x^2ydy = 0$. Enfin, nous choisissons de paramétrer $\widehat{AB}$ par $x = t$ et $y = 1-t$ avec t allant de 1 à 0 et donc :

$$I = \iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_{\widehat{AB}} x^2ydy = \int_1^0 \frac{t^2(1-t)}{2}(-dt) = \int_0^1 \frac{t^2(1-t)}{2}dt = \frac{1}{24}.$$

Remarquons qu'il n'aurait pas été plus difficile ici de calculer directement l'intégrale double sans utiliser la formule de Green-Riemann :

$$\iint_{\mathscr{D}} xydxdy = \int_{0^1}\left(\int_0^{1-x} xydy\right)dx = \int_0^1 x[\frac{y^2}{2}]_0^{1-x}dx = \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}dx = \frac{1}{24}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. La forme $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Paramétrons le cercle C par $x = \cos t$, $y = \sin t$ avec $t \in [0;2\pi]$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1dt \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

3. La forme ω n'est pas exacte, sinon son intégrale curviligne sur la courbe fermée C serait nulle et cela contredirait notre résultat de la question précédente. Remarquons cependant que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

En fait, avec cet exemple, on voit que dans le théorème de Poincaré, l'hypothèse que l'ouvert doit être étoilé, est indispensable. Ici $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'est pas étoilé, c'est un domaine "troué". De plus, $\int_C \omega$ n'est pas nulle car le cercle entoure le "trou".
